

13 januari 2013

Wat is de kortste weg naar huis?

Wiskundige Lex Schrijver over optimale combinaties in het alledaagse leven.

'Bij de volgende afslag links, neem op de rotonde de derde afslag, probeer om te keren.' Hoe weet het navigatiesysteem wat de kortste route is? Wiskundige Lex Schrijver legt het uit tijdens de wakker worden kinderlezing in Nemo.

De kinderen in het publiek wonen natuurlijk niet allemaal op hetzelfde adres en zitten niet op dezelfde school. Hoe onderzoeken we dan toch de kortste weg van school naar huis? Schrijver heeft hier rekening mee gehouden en een voorbeeldplattegrond meegenomen. Een punt stelt de school voor, een ander punt je huis. Bij de straten staan de afstanden geschreven, in decameter. 'Dat is tien meter', weet een meisje. Alle kinderen krijgen een kopie en gaan meteen aan de slag; op zoek naar de kortste route.

Na even puzzelen heeft iedereen een route gevonden, wie heeft de kortste? Schrijver noteert de afstanden. 'Ik ga met de helikopter, dan vlieg ik rechtstreeks en heb ik de kortste route', zegt een slim jongetje. Schrijver merkt op dat hij dan mooi met de stelling van Pythagoras kan uitrekenen hoe lang zijn route is. Maar dat vindt het jongetje nog een beetje te ingewikkeld. Twee jongetjes vinden een route van 31 decameter. Helaas blijkt dat na narekenen toch niet helemaal te kloppen. De meeste kinderen vinden een route van 35 decameter. Is dat dan ook de kortste? Nee! Een jongetje heeft een route van 34 decameter.

Miljardair

Alleen hoe weten we nu zeker of dit dan echt de kortste is? Je kunt alle mogelijkheden uitproberen, maar dan ben je ontzettend lang bezig. De routeplanner doet dat veel sneller. Daarvoor bestaat een truc, die is ontdekt door de Nederlandse wiskundige Edsger Dijkstra. We gaan vanaf het beginpunt, de school, kijken hoe ver het is naar de dichtstbijzijnde kruispunten en zetten op die kruispunten de afstand tot de school. Dan nemen we het kruispunt met het kleinste getal, de kleinste afstand tot de school, zetten er een rondje omheen, en kijken vanuit daar naar de dichtstbijzijnde kruispunten. Daar komt ook weer de afstand tot de school in te staan. Zodra een kruispunt aan de beurt geweest is, komt er een cirkeltje omheen, om duidelijk te maken dat het kruispunt aan de beurt is geweest.

Op sommige kruispunten kom je via verschillende routes. Je schrijft dan altijd het kleinste getal op, de kortste afstand, de kortste route om er te komen. Zo loop je straat voor straat, kruispunt voor kruispunt, de hele plattegrond af. Schrijver doet het in een paar minuten. Maar de computer kan het in een fractie van een seconde. Pas als alle kruispunten een rondje hebben, weten we zeker dat de route van 34 decameter inderdaad de kortste was. Applaus voor het jongetje!

Dijkstra beschreef zijn truc, zijn algoritme, al in 1956. Inmiddels wordt het overal gebruikt. 'Als Dijkstra één duizendste eurocent had ontvangen voor alle toepassingen, was hij miljardair geweest', zegt Schrijver.

Open envelop

We hebben nu de kortste route van school naar huis gedaan. Maar kun je ook een route verzinnen waarbij je door alle straten één keer loopt? Iedereen gaat weer aan de slag. Sommige kinderen zeggen dat het niet lukt, anderen wel. Een jongetje vertelt zijn route, en inderdaad, het is mogelijk om van school naar huis te lopen en precies een keer door alle straten te lopen.

Schrijver laat een tekening zien van een open envelop. Dat spelletje kennen de meeste kinderen wel. Je moet de open envelop -ook wel een huisje met een kruisje- tekenen, zonder je pen van het papier te halen. Een jongetje doet voor hoe het moet. Hij vergeet even hoe hij ook alweer verder moest, iemand anders maakt het af. Applaus! Lukt het ook met een dichte envelop, een vierkant met een kruisje? Nee, dat kan niet, je hebt het

dakje van het huis nodig.

Eilandje

Waarom kun je wel een open en geen dichte envelop tekenen uit een lijn? Het heeft iets met even en oneven te maken. De kinderen weten heel goed wat dat is, ze noemen de even getallen op: twee, vier, zes, acht.. en de oneven: een, drie, vijf, zeven.. 'Jullie zijn goed wakker', zegt Schrijver tevreden. We zoomen in op een kruispunt. Het is belangrijk dat het een even kruispunt is. Je gaat er naar toe door de ene straat, en je kunt er vandaan door de andere straat. Bij een oneven kruispunt heb je er een probleem. Je kunt er heen door de eerst straat, vandaan door de tweede straat, en weer naartoe door de derde straat. Maar vervolgens mis je een straat om weer weg te komen. Bij de open envelop heb je twee kruispunten waar drie straten op uitkomen. Zodra je in deze kruispunten begint en eindigt, komt het goed. Als je in een even kruispunt begint, lukt het niet de open envelop te tekenen.

'Je mag maximaal twee oneven kruispunten hebben', vat een kind het mooi samen. En dat is precies wat wiskundige Leonhard Euler bedacht in 1736. In het plaatsje Koningsbergen ligt een eilandje in de rivier, met 7 bruggen. Euler onderzocht of het mogelijk was een wandeling te maken waarbij je precies een keer over elke brug liep. Maar zijn conclusie was dat er te veel oneven kruispunten waren, dus het niet mogelijk was. Jammer voor de wandelaars, maar wel een knap staaltje rekenwerk van Euler, volgens Schrijver een van de beste drie wiskundigen ooit.

Strooiwagens

Voor een fijne zondagwandeling maakt het misschien niet zo veel uit of je een paar keer door dezelfde straat loopt, maar de postbode doet dat natuurlijk het liefst zo min mogelijk! De postbode moet langs alle straten, maar wil dat wel zo efficiënt mogelijk doen. Tijd voor een nieuwe opdracht: hoe maak je vanuit het postkantoor een ronde langs alle straten, en eindig je weer bij het postkantoor? De kinderen gaan weer puzzelen en Schrijver noteert de gevonden afstanden. Uiteindelijk tekent hij de kortste route op de plattegrond.

De kortste weg vinden langs een aantal vaste straten is niet alleen een probleem van de postbode, het geldt ook voor de stratenveger, vuilniswagens, strooiwagens, noem maar op. Zelfs voor kinderen, denk maar aan de kortste route in de supermarkt, of aan sintmaarten lopen. Maar ook voor handelsreizigers, en het maken van computerchips. Bovendien is het belangrijk voor de roosters van treinen, iets waar Schrijver veel aan gewerkt heeft. Schrijver heeft genoeg te vertellen om nog uren door te praten over wiskunde, maar het kan niet, hij moet naar een conferentie in Duitsland en zijn trein vertrekt om 12.34 uur. 'Ik hoop dat hij 56 seconden te laat is', lacht de wiskundige, 'dan vertrek ik mooi om 12.34.56...'

Met dank aan: Edda Heinsman